30e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques

Demi-finale du 19 mars 2016

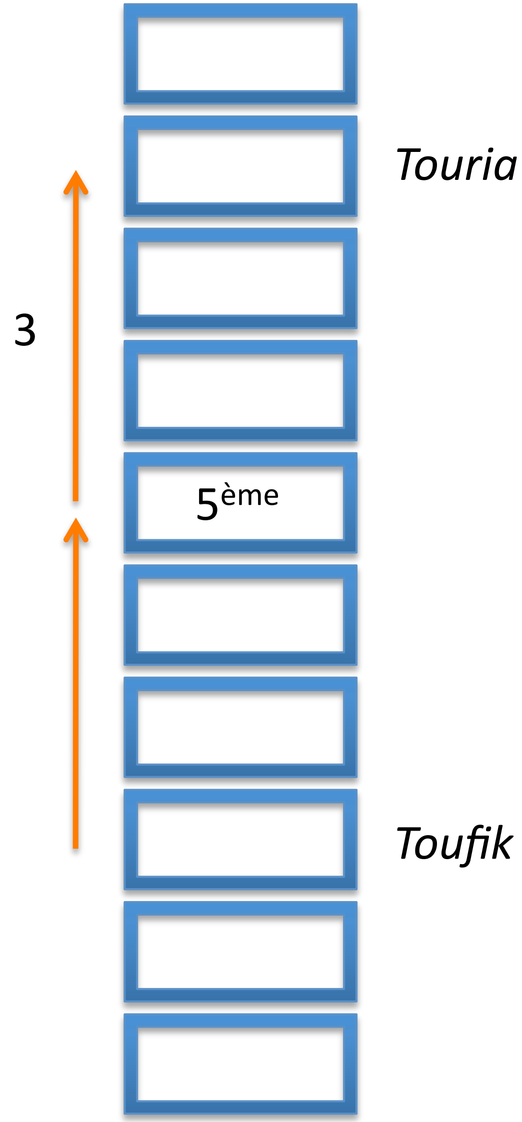
Solutions

Problème 1 – La tour

- A mi-chemin,
  Toufik doit encore monter
  de 6/2 = 3 étages

- 5 + 3 = 8

- Réponse : **8ème étage**



Problème 2 – Trois nombres pairs

- 6 + 8 + 10 = 24, 8 + 10 + 12 = 30, etc.

- Quand le plus petit nombre augmente de 2, la somme augmente de 6
- Pour augmenter la somme de 72 – 30 = 42,
  il faut augmenter le plus petit nombre de (42/6)x2 = 7x2 = 14
- 8 + 14 = 22

- *On vérifie que 22 + 24 + 26 = 72*

- Réponse : **22**

- *Note pour les plus grands : on enlève 2 à 72/3 = 24 (nombre au milieu)*

FFJM - 30e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - DF

Problème 3 – Le mur

3	1	8
x4 = 12	1	/4 = 2
/3 = 4	1	x3 = 6

- Réponse : **4 ouvriers**

Problème 4 – Le chemin de l’école

- Un aller ou un retour en bus dure
  24/2 = 12 minutes
- Un aller ou un retour à pied dure
  60 – 12 = 48 minutes
- 2x48 = 96 minutes
- 96 – 60 = 36 minutes
- Réponse : **1 h 36 min**

1 heure

24 minutes

Problème 5 – Autoréférence

- Tout nombre écrit est compté, il n'y a pas de 0 à gauche

- **S**'il y a deux 0 (à droite)
- Il y a au moins trois 2
- D'où une contradiction

Dans ce cadre, il y a
… fois 2
2 fois 0
… fois 1
… fois 6
2 fois **0**

Problème 5 – Autoréférence

- **S**’il y a deux 6
- Le second 6 est à droite
- Il y a au moins trois 2
- D’où une contradiction

Dans ce cadre, il y a
… fois 2
1 fois 0
… fois 1
2 fois 6
2 fois **6**

Problème 5 – Autoréférence

- Il y a au moins trois 1
- C’est le nombre en bas à droite

- **Si** c’est 4
- Le quatrième 1 est en haut (à gauche)
- D’où une contradiction

Dans ce cadre, il y a
1 fois 2
1 fois 0
4 fois 1
1 fois 6
… fois **4**

Problème 5 – Autoréférence

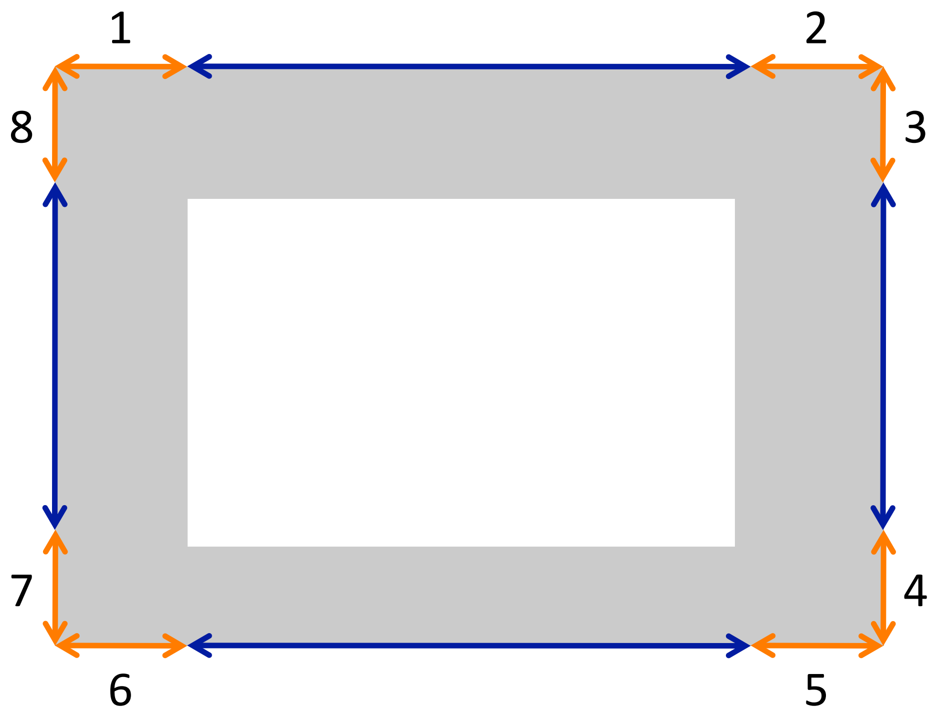
- Il n'y pas trois 2, il y en a deux
- Il y a trois 3

- *Note : la réponse est unique*

Dans ce cadre, il y a
2 fois 2
1 fois 0
3 fois 1
1 fois 6
3 fois 3

Problème 6 – Le jardin

- Pour passer du périmètre intérieur au périmètre extérieur, on ajoute 8 fois la largeur du jardin
- 32/8 = 4
- Réponse : **4 mètres**



Problème 7 – Le jeu

- Quand on passe d'une ligne à la suivante, on perd 2 points à la fin du jeu
- Réponse : **6 réponses fausses**
- *Note pour les plus grands :* $16 - F + (16 - F) = 20$ *donne* $F = 6$

Réponses		Points à la fin du jeu
Justes	**Fausses**	
16	0	32
15	1	30
14	2	28
13	3	26
12	4	24
11	5	22
10	**6**	**20**
9	7	18
…	…	…

Problème 8 – Les bidons

- Pour obtenir 223 moins un multiple de 10,
  il faut un multiple de 17 se terminant par 3
- Le facteur se termine par 9
- 17x19 = 323 > 223
- Le facteur est 9

- 17x9 = 153
- 223 – 153 = 70

- Réponse : **7 bidons** de 10 litres

Problème 9 – Le nombre de Mathilde

- <u>M0</u> = M + 2016
- 10M = M + 2016
- 9M = 2016
- M = 224

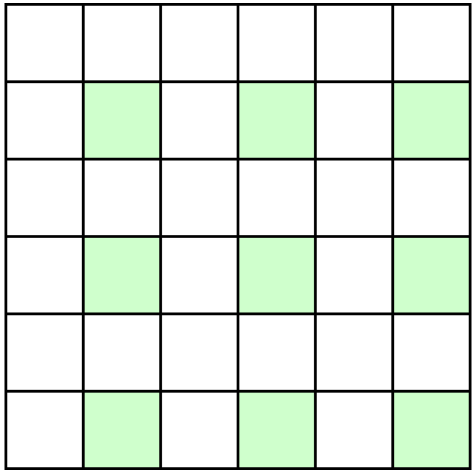
- Réponse : **224**

Problème 10 – Coloriage

- Dans un carré 2x2, il y au plus une case coloriée
- Le damier est divisible en 9 carrés 2x2
- Il y a au plus 9 cases coloriées

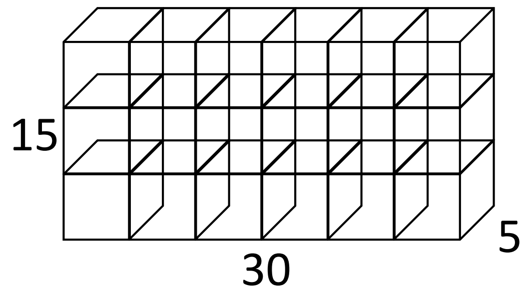
- C'est possible

- Réponse : **9 cases**

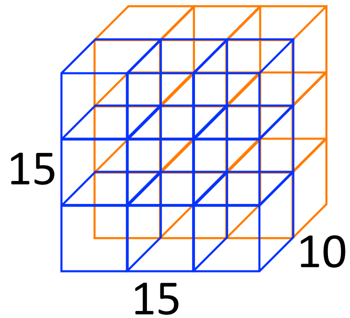


Problème 11 – Le parallélépipède

- Le long de l'arête mesurant 15 cm,
  il y a 15/5 = 3 cubes
- 18/3 = 6
- 6 = 1x6 ou 6 = 2x3 donne
  deux parallélépipèdes
  (1x3x6 et 2x3x3)



- $2\text{x}(3 + 6 + 18)\text{x}5^2 = 2\text{x}27\text{x}25 = 1350$
- $2\text{x}(6 + 6 + 9)\text{x}5^2 = 2\text{x}21\text{x}25 = 1050$



- **2** réponses : **1050 ou 1350 cm²**

Problème 12 – Produit maximal

- Dans chacun des deux nombres, les chiffres décroissent de gauche à droite

- On coupe chacun des deux nombres en deux nombres
  dont ceux à droite ($\underline{a}$ et $\underline{b}$) ont le même nombre de chiffres p
- Soit $\underline{Aa}\ \underline{Bb}$ le produit maximal, $\underline{Aa}$ commençant par 9
- $\underline{Aa}\ \underline{Bb} > \underline{Ab}\ \underline{Ba}$ si, et seulement si, en éliminant les termes symétriques,
  $\underline{A}\ \underline{b}\ 10^p + \underline{a}\ \underline{B}\ 10^p > \underline{A}\ \underline{a}\ 10^p + \underline{b}\ \underline{B}\ 10^p$
  $(\underline{A} - \underline{B})\ (\underline{b} - \underline{a})\ 10^p > 0$
  $\underline{b} > \underline{a}$
- Pour p de 1 à 4, $\underline{b}$ est supérieur à $\underline{a}$

Problème 12 – Produit maximal

• Le chiffre des unités de <u>Bb</u> n'est pas 0 (p = 1)	**9….**	**….0**
• <u>Aa</u> ne commence pas par 98 (p = 4)	**98..0**	**…..**
• <u>Aa</u> ne commence pas par 97 (p = 4)	**97..0**	**8….**
	9…0	**87…**

Problème 12 – Produit maximal

- Selon le chiffre qui suit 9, il y a quatre cas à examiner
  96..0 x 875.. (p = 3 interdit 96**5**.0),
  95..0 x 876.., 94..0 x 8765. et 93210 x 87654

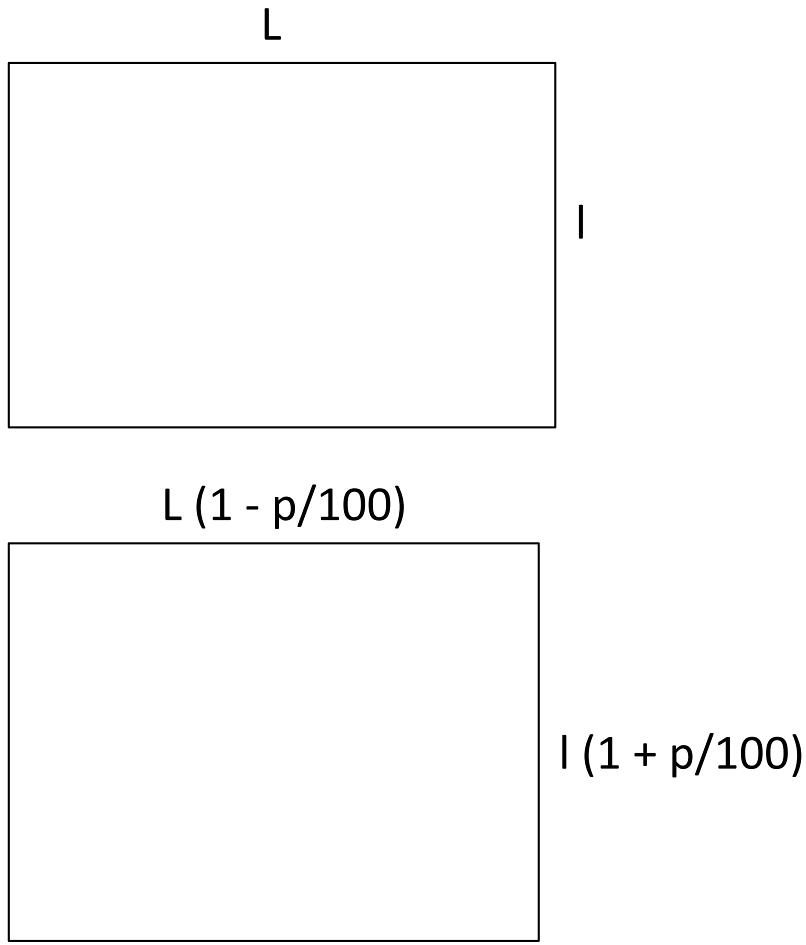
- $(x+\alpha)(y-\beta) - xy = \alpha y - \beta x - \alpha\beta > 0$ si, et seulement si, $\alpha/\beta > x/(y - \beta)$
- $x/(y - \beta) < 96420/87531 \approx 1{,}1$ (p = 2 interdit 96.**3**0)
- $\alpha/\beta \geq 10$
- On maximise Aa et on minimise Bb

- Réponse : **96420 x 87531**

Problème 13 – Le rectangle modifié

- On cherche le plus grand entier p tel que $(1 - p/100)(1 + p/100) > 0{,}98$
- $1 – (p/100)^2 > 0{,}98$
- $(p/100)^2 < 0{,}02$
- $p/100 < 0{,}1414…$

- Réponse : **14 %**



Problème 14 – Les deux nombres

- Si 3) et 4) sont vraies,
  alors le nombre premier a + 7b = (a+b) + 6b, divisible par 3, est 3
- a = 3 et b = 0, 2) est fausse et 1) n'a pas de sens

- 1) et 2) sont vraies
- b divise a+1 = 2b+6, b divise 6

- Si b = 1, a = 7, 3) (3 divise 8)et 4) (14 est premier) sont fausses
- Si b = 2, a = 9, 3) (3 divise 11) est fausse et 4) (23 est premier) est vraie
- Si b = 3, a = 11, 3) (3 divise 14) et 4) (32 est premier) sont fausses
- Si b = 6, a = 17, 3) (3 divise 23) est fausse et 4) (59 est premier) est vraie

- **2** réponses : **(a=9; b=2) ou (a=17; b=6)**

Problème 15 – Trois nombres premiers

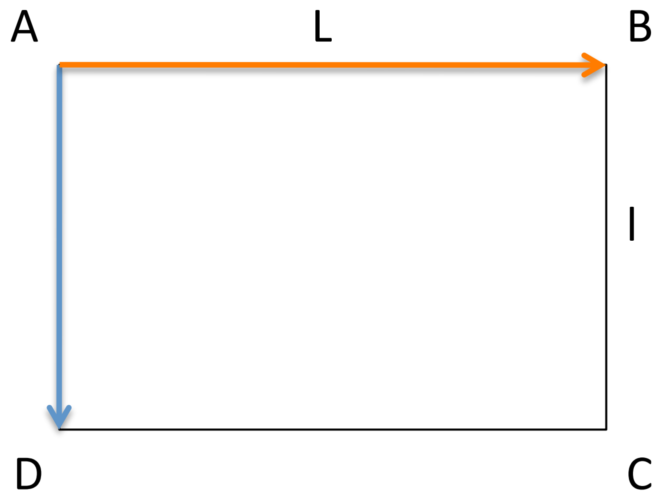
- Un des nombres premiers est divisible par 11, c'est 11
- On cherche x et y premiers avec $x \leq y$
  tels que $11xy = 11(11 + x + y)$ soit $xy = 11 + x + y$
- $(x-1)(y-1) = 12$

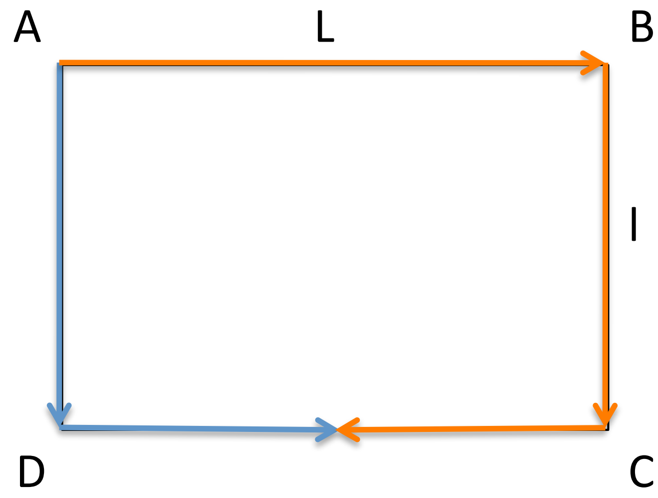
- Si $x-1 = 1$ soit $x = 2$, $y-1 = 12$ soit $y = 13$
- Si $x-1 = 2$ soit $x = 3$, $y-1 = 6$ soit $y = 7$
- **Si** $x-1 = 3$, alors $x = 4$ non premier

- **2** réponses : **(2; 11; 13) ou (3; 7; 11)**

Problème 16 – Le pâté de maisons

- Le rapport de la vitesse de Mathias à celle de Mathilde est L/l
- Quand ils se rencontrent, (L + l + L/2)/(l + L/2) = L/l
- L = 2l
- L = 2016/3 = 672
  et l = 672/2 = 336
- Réponse : **AB = 672 ; AD = 336**





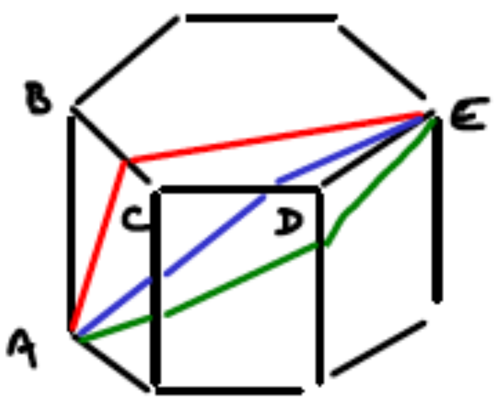
Problème 17 – Les coups d'éponge

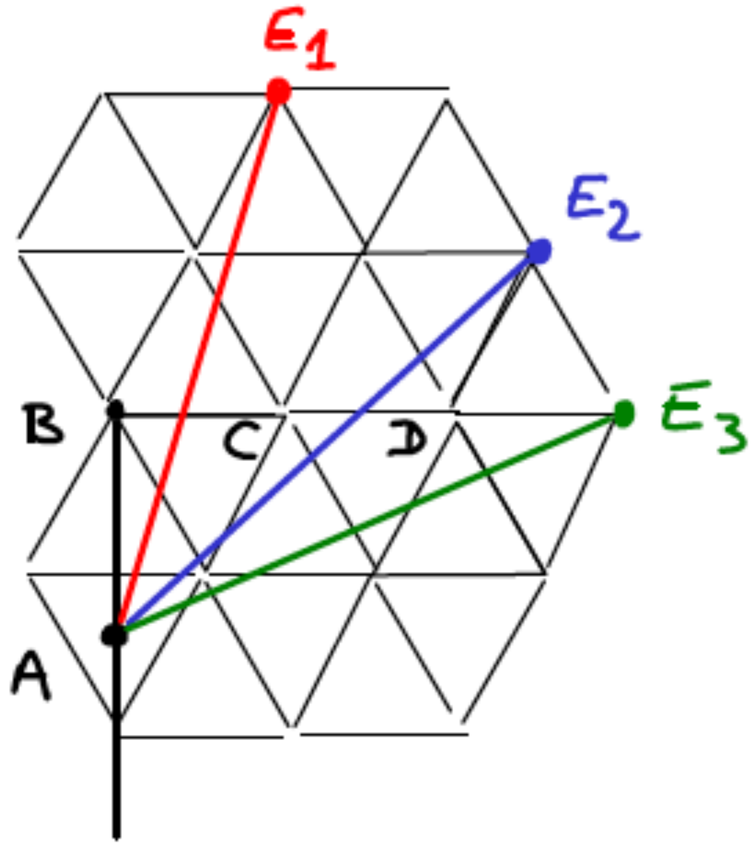
Après l'opération N°	Il reste	Avec
1	$2 + 2k$	$0 \leq k \leq 1007$
2	$2 + 4k$	$0 \leq k \leq 503$
3	$2 + 4 + 8k$	$0 \leq k \leq 251$
4	$2 + 4 + 16k$	$0 \leq k \leq 125$
5	$2 + 4 + 16 + 32k$	$0 \leq k \leq 62$
6	$2 + 4 + 16 + 64k$	$0 \leq k \leq 31$
7	$2 + 4 + 16 + 64 + 128k$	$0 \leq k \leq 15$
8	$2 + 4 + 16 + 64 + 256k$	$0 \leq k \leq 7$
9	$2 + 4 + 16 + 64 + 256 + 512k$	$0 \leq k \leq 3$
10	$2 + 4 + 16 + 64 + 256 + 1024k$	$0 \leq k \leq 1$
11	$2 + 4 + 16 + 64 + 256 + 1024$	

- Réponse : **1366**

Problème 18 – Le prisme

- Il y a 3 chemins candidats,
  plus les mêmes par l'arrière
- On déplie pour qu'ils soient
  des lignes droites
- Le problème devient : pour quelle
  hauteur AB, parmi les trois distances
  AE_1, AE_2 et AE_3, deux sont-elles
  ex æquo au minimum ?





Problème 18 – Le prisme

- **Si** $AE_1 = AE_2$, A est sur la médiatrice de (E_1,E_2) en bas à gauche, en dessous de la médiatrice de (E_2,E_3), $AE_3 < AE_2$ et on n'est pas au minimum
- **Si** $AE_2 = AE_3$, A est en dessus de la médiatrice (E_1,E_2), $AE_1 < AE_2$ et on n'est pas au minimum

- $AE_1 = AE_3$
- $(a\sqrt{3} + AB)^2 + a^2 = AB^2 + (3a)^2$
- $AB = 5\sqrt{3}/6\ a$ (a = 5 cm)

- Réponse : **7,2 mm**