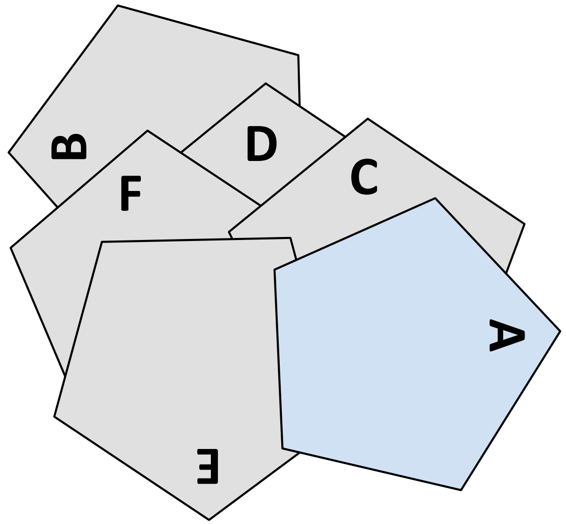
29e Championnat International
des Jeux Mathématiques et Logiques

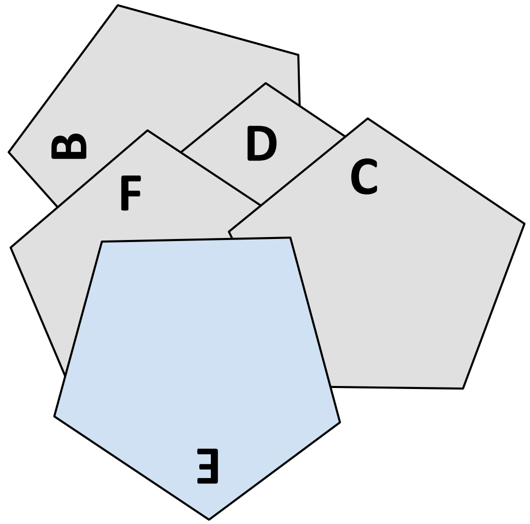
Demi-finale du 21 mars 2015

Solutions

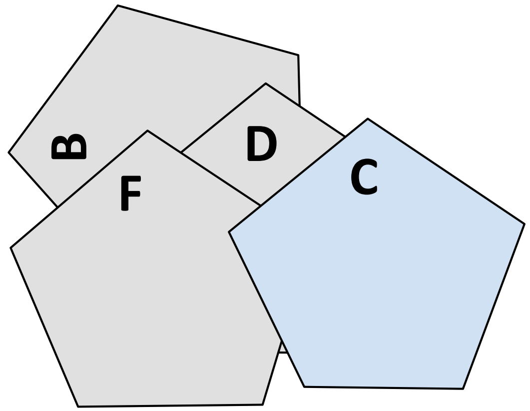
Problème 1 – Le collage de Mathilde

- Procédons dans le sens inverse
- La figure A a été collée en dernier
- La figure E a été collée juste avant

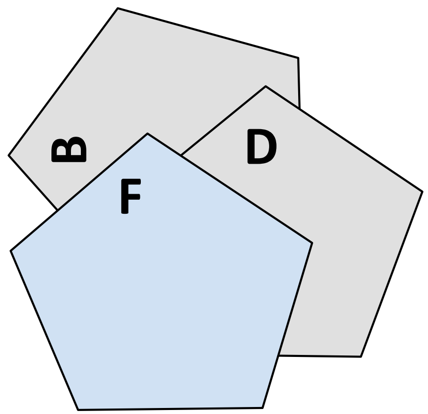




Problème 1 – Le collage de Mathilde

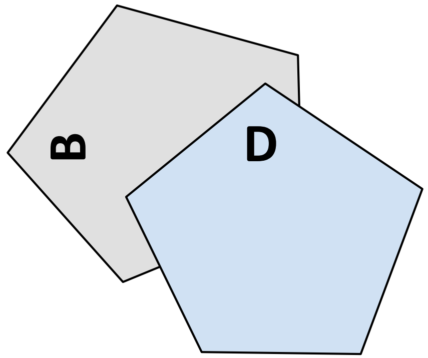


- La figure C a été collée juste avant
- La figure F a été collée juste avant



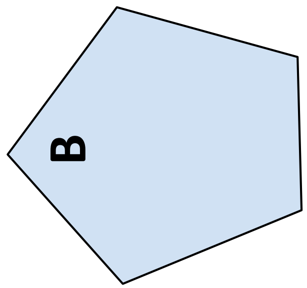
FFJM - 29^{e} Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - DF

Problème 1 – Le collage de Mathilde



- La figure D a été collée juste avant

- La figure B a été collée juste avant

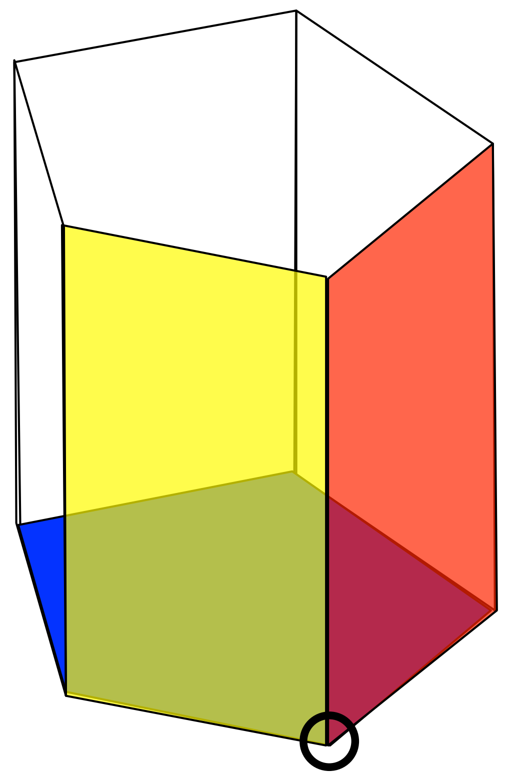


- La réponse est **B D F C E A**

Problème 2 – La boîte à crayons

- Plaçons nous au sommet marqué d'un cercle

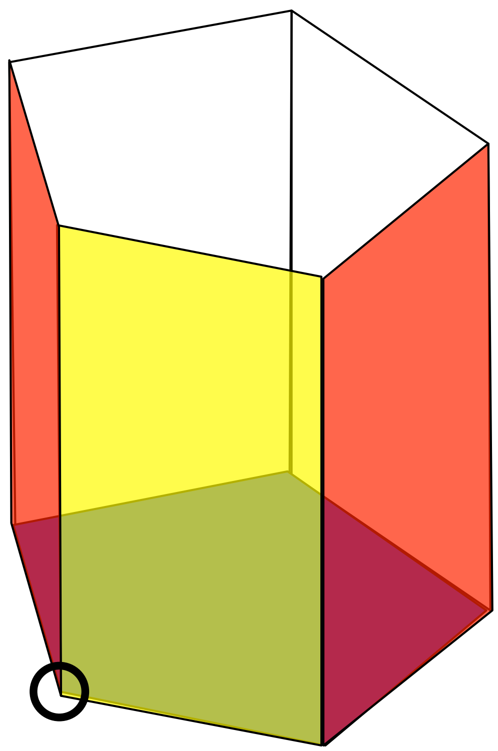
- Il faut au moins 3 couleurs, une pour le fond (bleu) et deux (rouge et jaune), pour les faces dont les côtés se rejoignent à ce sommet



Problème 2 – La boîte à crayons

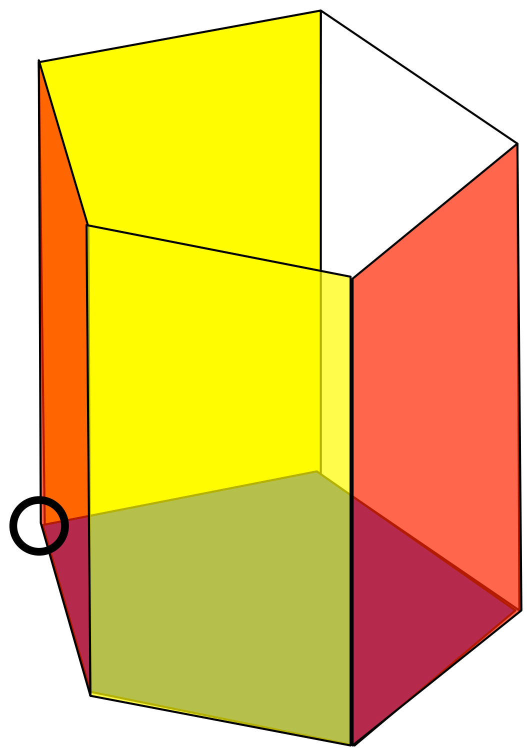
- Continuons le coloriage
  des faces en tournant dans
  le sens des aiguilles d'une montre

- La face suivante doit être rouge



Problème 2 – La boîte à crayons

- La face suivante doit être jaune

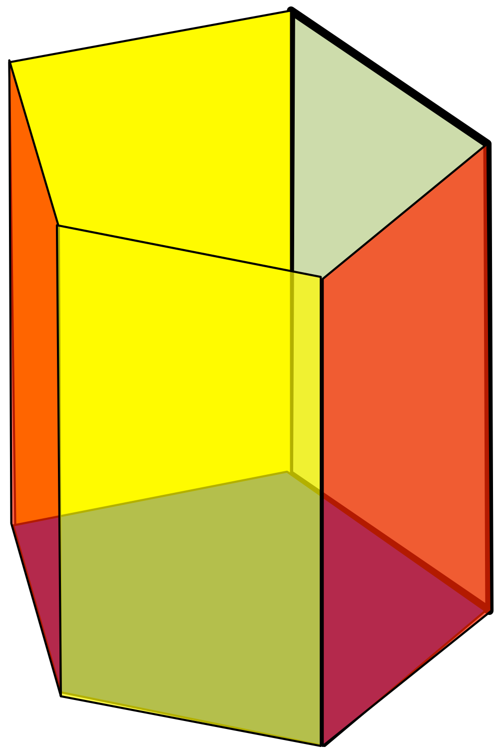


FFJM - 29e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - DF

Problème 2 – La boîte à crayons

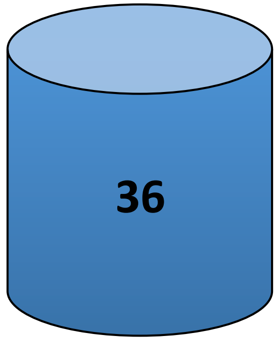
- La dernière face
  touche les 3 couleurs
- Elle nécessite une 4ème couleur

- La réponse est **4** couleurs

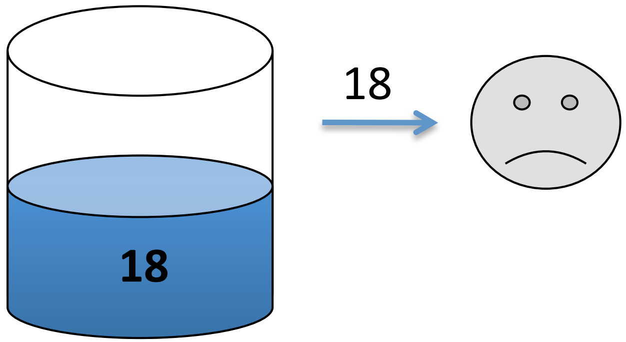


Problème 3 – Le médicament

- Le verre contient 36 gouttes

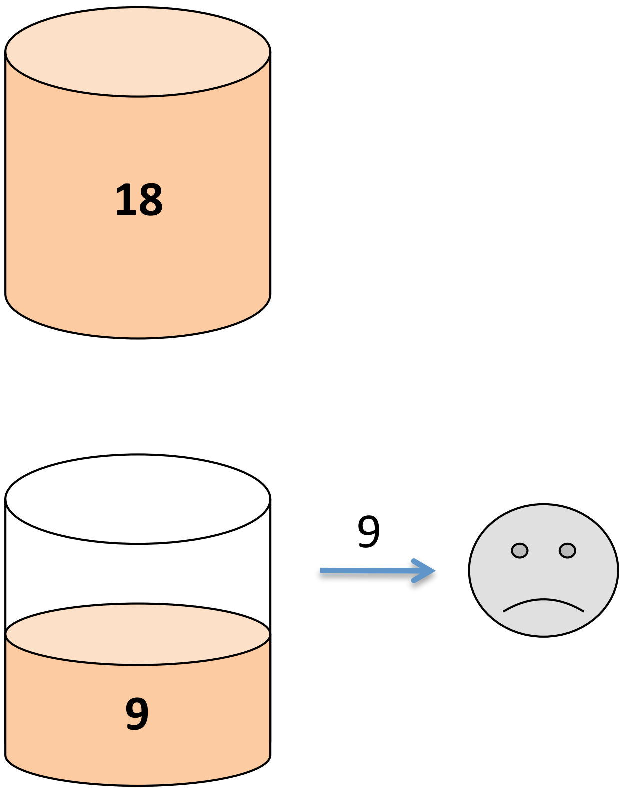


- Mathias boit la moitié du verre
- Il absorbe 18 gouttes



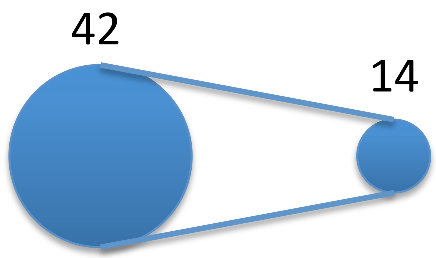
Problème 3 – Le médicament

- Le verre est complété avec du jus d'orange
- Mathias boit la moitié du verre (puis jette le reste)
- Il absorbe 9 gouttes
- Au total, il a absorbé 18 + 9 = **27** gouttes



Problème 4 – Le vélo de Mathilde

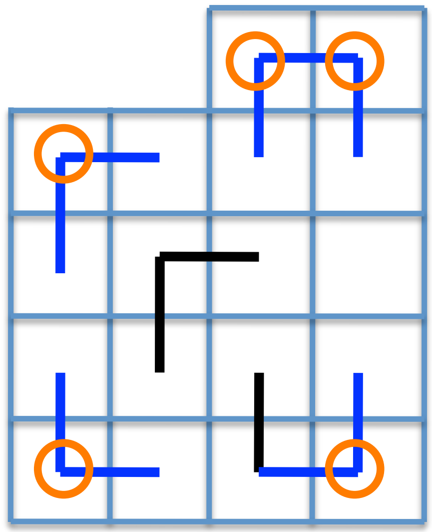
- Lorsque Mathilde fait effectuer
  1 tour à son pédalier,
  la chaîne tourne de 42 dents,
  et le pignon fixé à la roue arrière
  effectue 42 / 14 = 3 tours



- Lorsque Mathilde fait effectuer
  15 tours à son pédalier,
  la roue arrière effectue
  15 x 3 = **45** tours

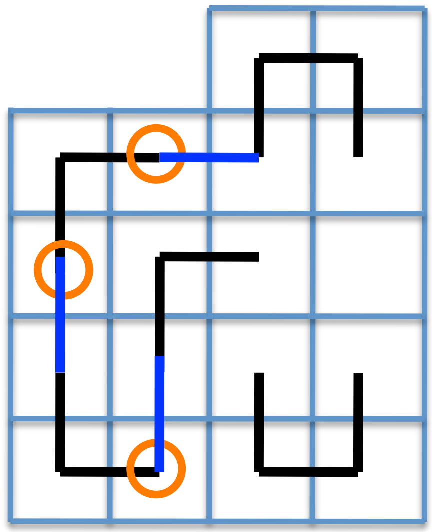
Problème 5 – Le circuit

- Le passage de la boucle à chacun des cinq coins est forcé



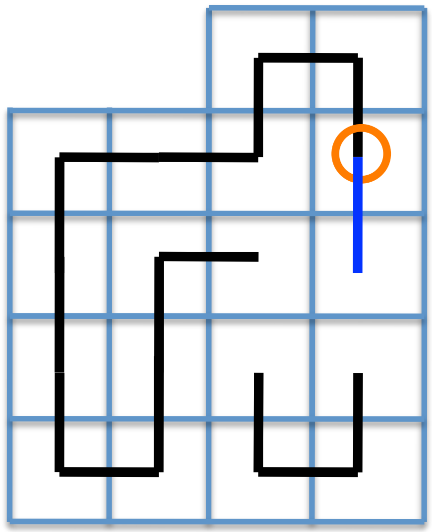
Problème 5 – Le circuit

- La boucle continue là où elle n'a pas le choix



Problème 5 – Le circuit

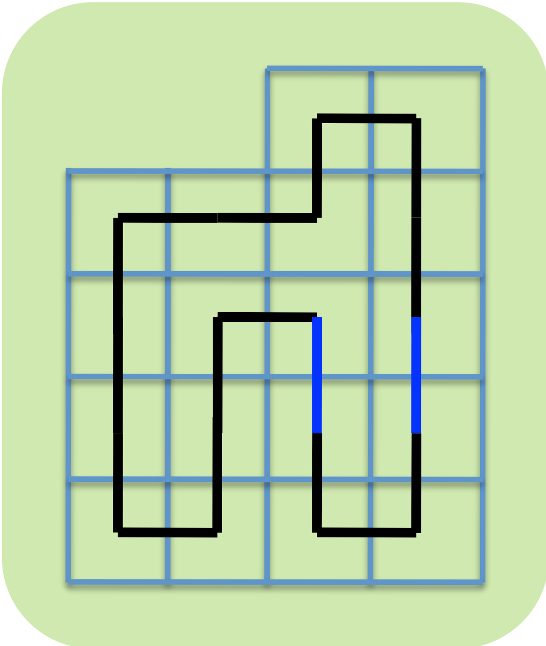
- La boucle continue là où elle n'a pas le choix



Problème 5 – Le circuit

- Il y a une seule boucle,
  nous ne pouvons pas en isoler
  une seconde en bas à droite

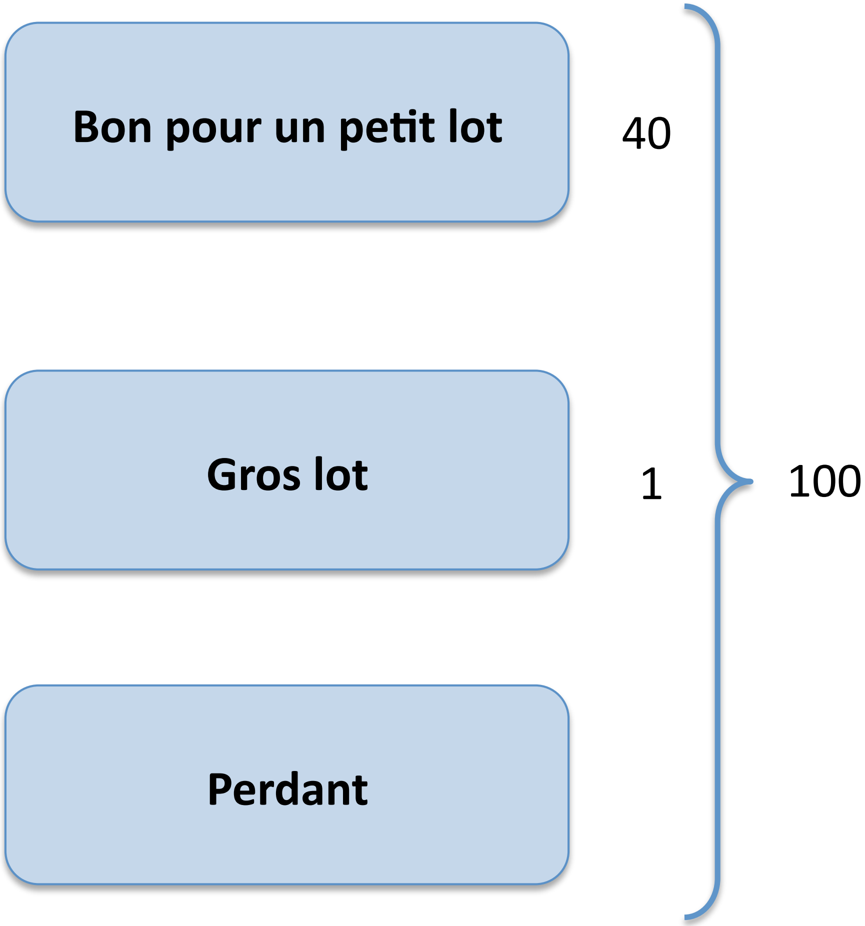
- *La réponse est unique*



Problème 6 – La tombola

- 100 tickets ont été imprimés
- 100 – 40 – 1 = 59 tickets mentionnent « Perdant »

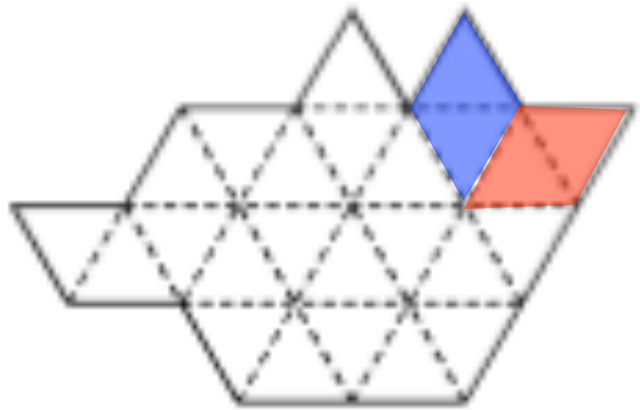
- Pour être certain d'obtenir au moins un lot, on devrait acheter 59 + 1 = **60** tickets



Problème 7 – Découpage

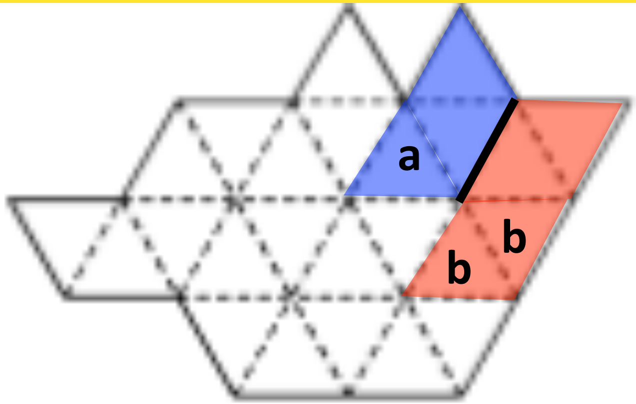
- Chaque partie compte
  24 / 4 = 6 triangles

- Les 2 triangles bleu
  appartiennent à la même partie
- Les 2 triangles rouge
  appartiennent à la même partie

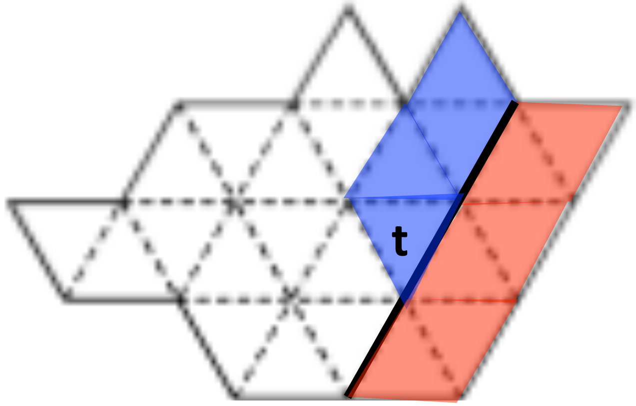


Problème 7 – Découpage

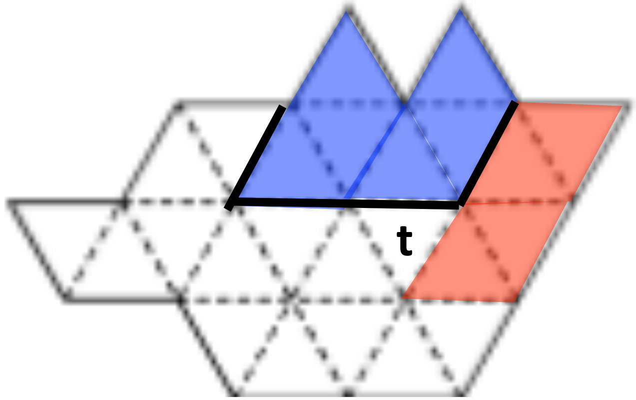
- **Si** la partie rouge est différente de la partie bleu
- Le triangle a est bleu
- Les triangles b sont rouge



- Si le triangle t est bleu, alors la partie rouge est forcée puis il est impossible de découper la figure

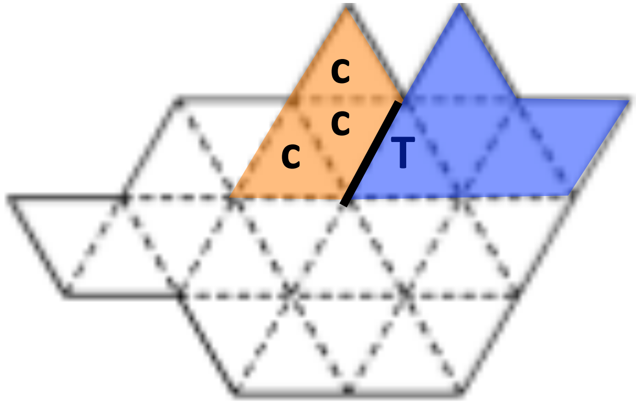


- Si le triangle t n'est pas bleu (il peut être rouge), alors la partie bleu est forcée puis il est impossible de découper la figure

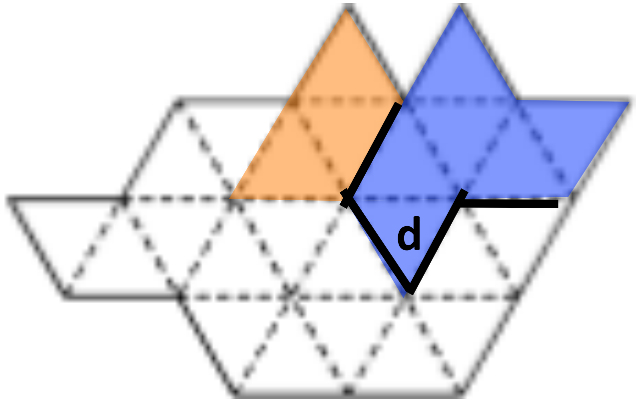


Problème 7 – Découpage

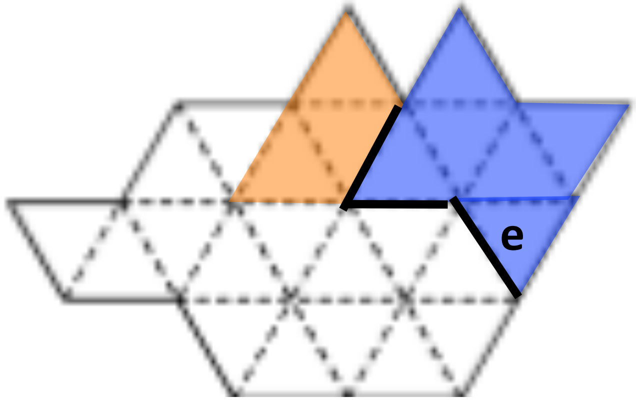
- **Si** le triangle T est bleu,
  alors les triangles c ne sont pas bleu,
  ils sont par exemple orange



- Si le triangle d est bleu, alors la partie bleu est complète puis il est impossible de découper la figure

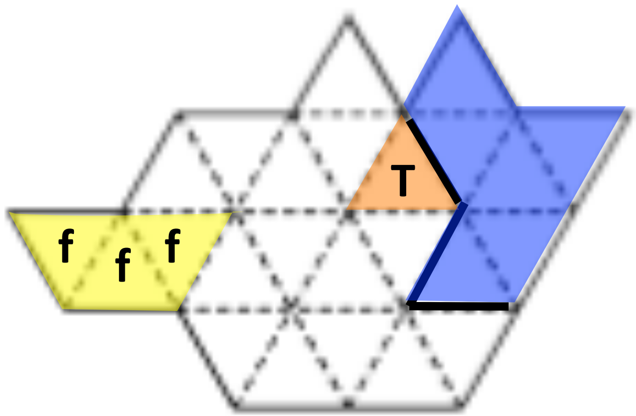


- Si le triangle e est bleu, alors la partie bleu est complète puis il est impossible de découper la figure

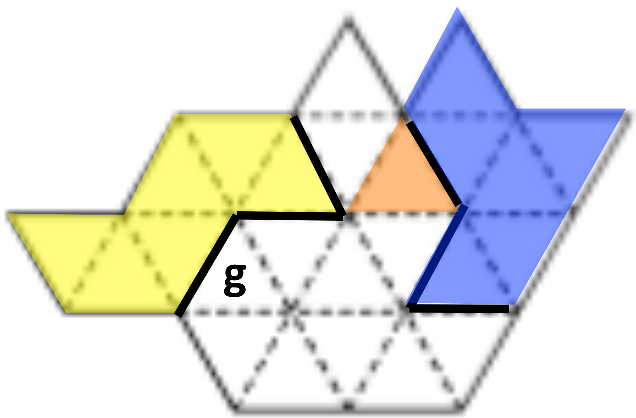


Problème 7 – Découpage

- Le triangle T n'est pas bleu,
  il est par exemple orange
- La partie bleu est forcée
- Les triangles f sont
  d'une même couleur,
  non orange, par exemple jaune

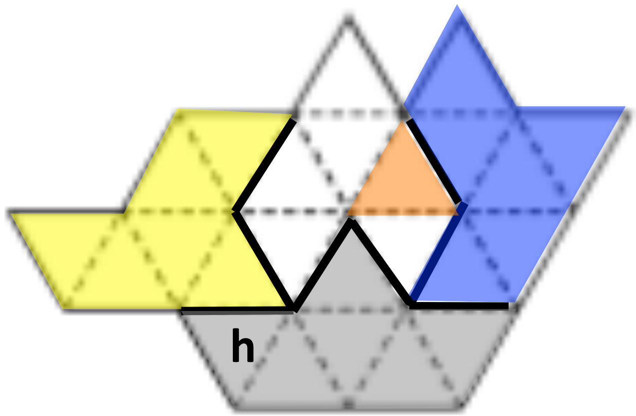


- **Si** le triangle g n'est pas jaune,
  alors la partie jaune est forcée,
  mais elle est différente de la partie bleu

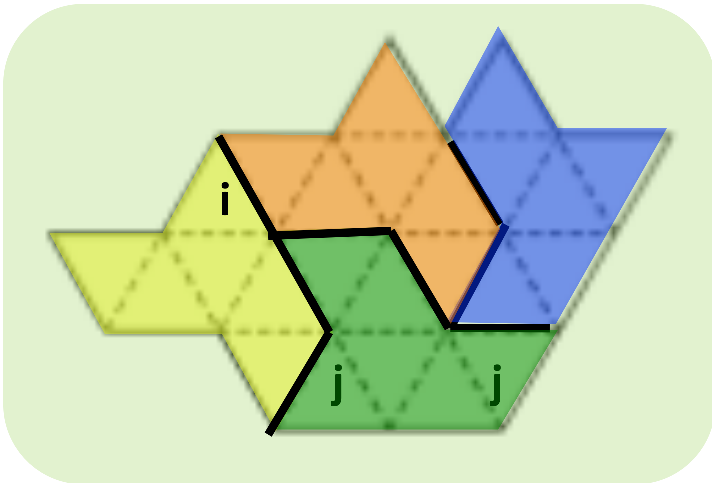


Problème 7 – Découpage

- **Si** le triangle h n'est pas jaune,
  alors la partie jaune est forcée
- La partie grise est forcée,
  mais elle est différente de la partie bleu



- Seul le triangle i permet de compléter
  la partie jaune pour qu'elle soit
  superposable à la partie bleu
- La partie verte est forcée
  à partir des triangles j



- *La réponse est unique*

Problème 8 – Une addition et une multiplication

- A la ligne N, Mathias atteindra moins que $(N+2)\ ((N+2) + (N+2)) = 2\ (N+2)^2$

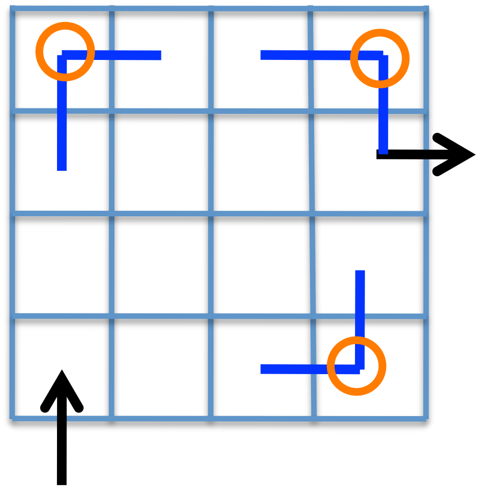
- $2 \times 31^2 = 2 \times 961 = 1922 < 2015$
- $(N+2)$ est strictement supérieur à 31
- N est au moins égal à 30

- $30 \times (31 + 32) = 30 \times 63 = 1890 < 2015$
- $31 \times (32 + 33) = 31 \times 65 = 2015$

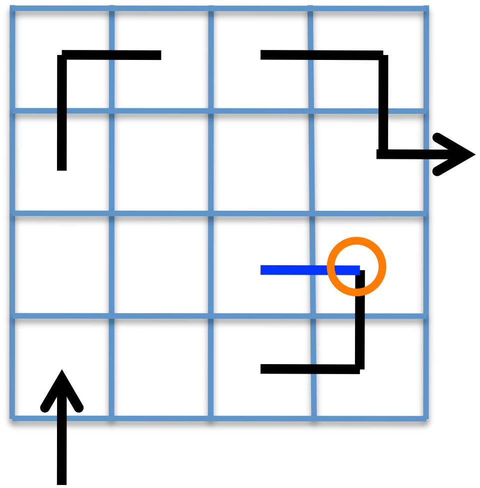
- Mathias aura écrit **31** lignes de calcul lorsqu'il atteindra 2015

Problème 9 – Le musée

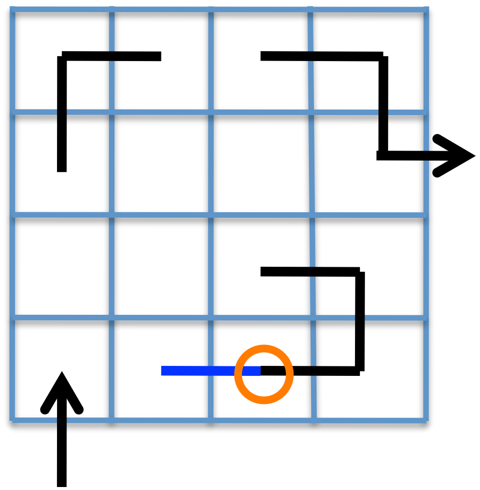
- Chaque parcours est forcé
  à chacun des trois coins



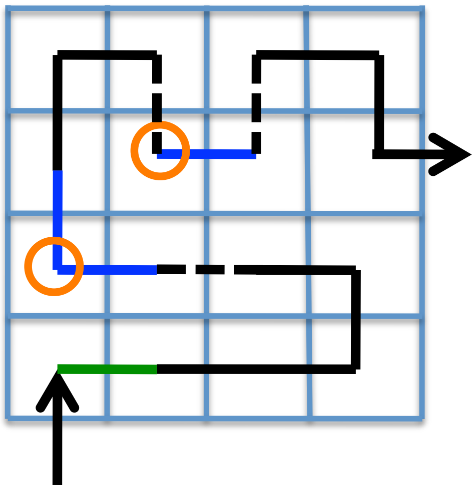
Problème 9 – Le musée



- Chaque parcours continue là où il n'a pas le choix

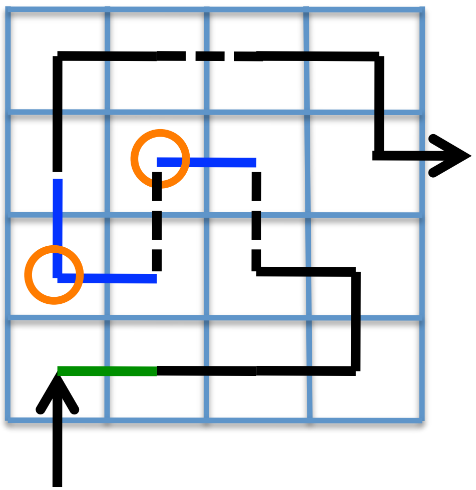


Problème 9 – Le musée

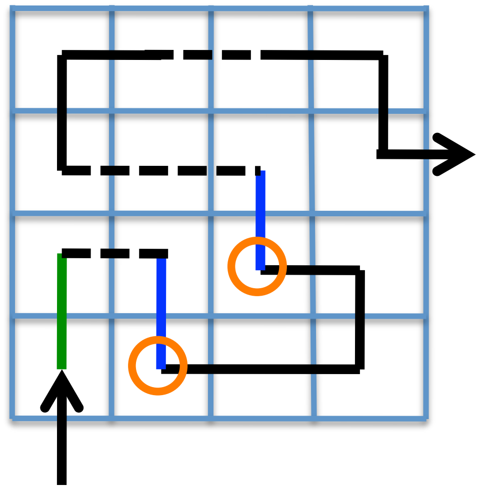


- **Si** le parcours tourne à droite après l'entrée (trait vert)
- Les traits bleu sont forcés

- Il existe **2** parcours différents (traits pointillés)

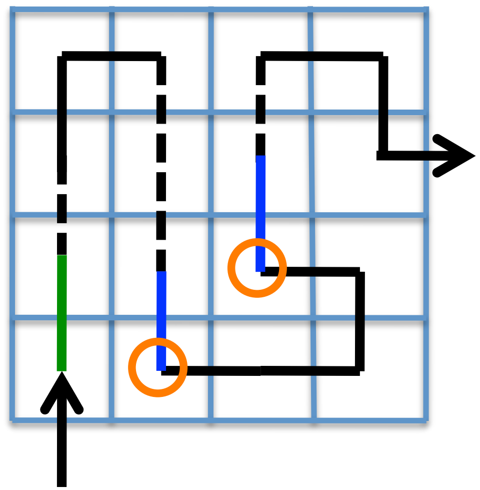


Problème 9 – Le musée



- **Si** le parcours ne tourne pas à droite après l'entrée (trait vert)
- Les traits bleu sont forcés

- Il existe **2** parcours différents (traits pointillés)



- Au total,
il existe **4** parcours différents

Problème 10 – Division

- La somme des deux chiffres du nombre est au plus 9 + 9 = 18
- Le reste est au plus 17

- **Si** le reste est 17 (et la somme 18)
- Le nombre est 99
- 99 = (5 x 18) + 9
- Le reste est 9, d'où une contradiction

- **Si** le reste est 16, la somme n'est pas 18, elle est 17
- Le nombre est 98 ou 89
- 98 = (5 x 17) + 13, 89 = (5 x 17) + 4
- Le reste est 13 ou 4, d'où une contradiction

Problème 10 – Division

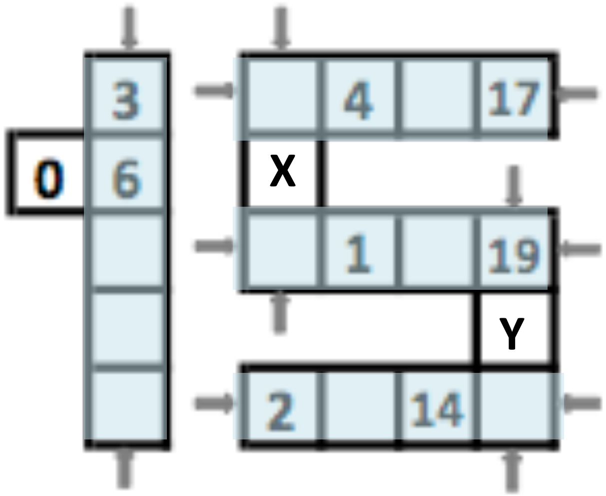
- **Si** le reste est 15, la somme n'est pas 18 ni 17, elle est 16
- Le nombre est 97, 88 ou 79
- 97 = (6 x 16) + 1, 88 = (5 x 16) + 8, 79 = (4 x 16) + 15

- Le plus grand reste que l'on puisse obtenir est **15**

Problème 11 – Le 15 magique

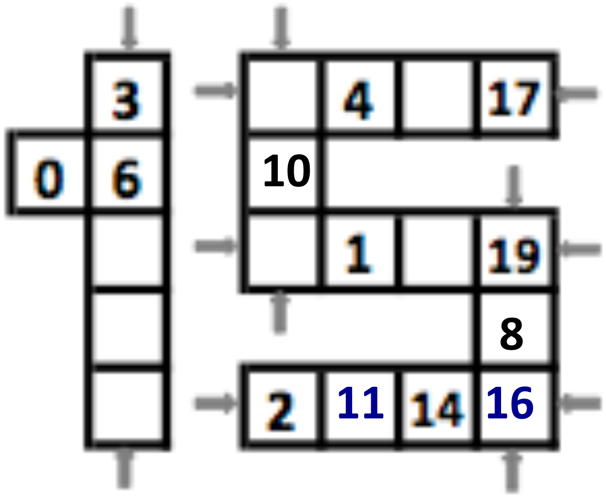
- La somme des entiers de 1 à 19 est
  $1 + 2 + \ldots + 18 + 19 =$
  $19 + 18 + \ldots + 2 + 1 =$
  $(19 \times 20) / 2 = 190$

- La somme des nombres X et Y est
  $190 – (4 \times 43) = 190 – 172 = 18$
- 1, 2, 3, 4 et 6 sont déjà utilisés
- $Y \neq 5$, sinon $43 – 19 – Y = 19$ doublonne
- $Y \neq 7$, sinon $43 – 19 – Y = 17$ doublonne
- $Y \neq 9$, sinon $X = 18 – 9 = 9$ doublonne
- Le complément de X à 43 est au plus
  $18 + 16 = 34$ donc $X \geq 9$ puis $Y \leq 9$
- $Y = 8$ et $X = 10$



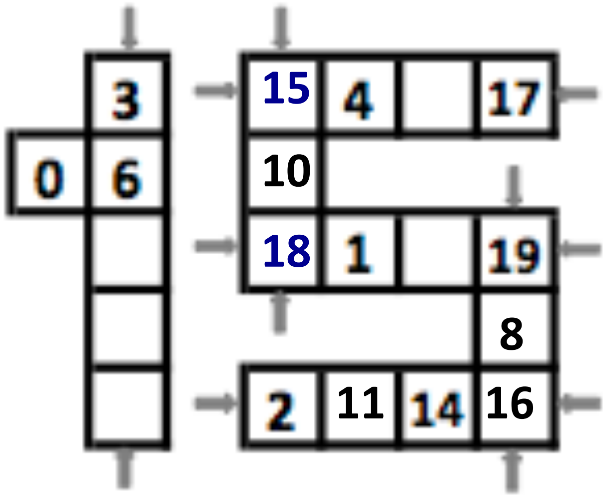
Problème 11 – Le 15 magique

- Nous complétons 43 – 19 – 8 = 16
puis 43 – 2 – 14 – 16 = 11



Problème 11 – Le 15 magique

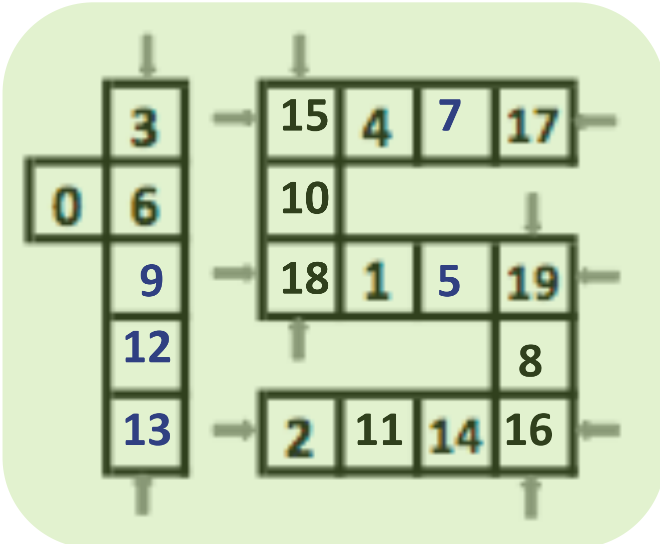
- Les compléments de 10 à 43 sont forcément 18 et 15
- 18 n'est pas au dessus de 10,
  sinon 43 – 18 – 4 – 17 = 4 doublonne



Problème 11 – Le 15 magique

- Nous complétons 43 – 15 – 4 – 17 = 7
  et 43 – 18 – 1 – 19 = 5

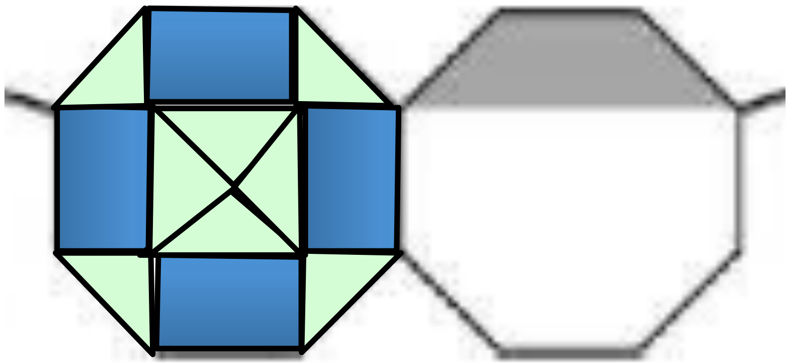
- Restent 9, 12 et 13 que nous rangeons en ordre croissant de haut en bas dans la barre verticale
- Nous vérifions que 3 + 6 + 9 + 12 + 13 = 43



- La réponse est unique

Problème 12 – Les lunettes

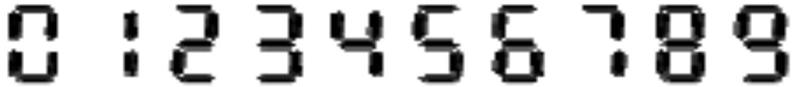
- Raisonnons sur l'un des deux verres
- L'aire totale compte 4 fois un rectangle bleu
- Les 8 triangles rectangles isocèles vert ont pour hypoténuse le côté de l'octogone, ils sont identiques
- L'aire totale compte 4 fois 2 triangles vert



- L'aire totale est 4 fois celle de la partie teintée
- La réponse est 24 / 4 = **6** cm^2

Problème 13 – Le cadran numérique

- Raisonnons sur la différence D(c) entre un chiffre c et son nombre de barrettes B(c)



Nombre de barrettes B	6	2	5	5	4	5	6	3	7	6
Différence D	-6	-1	-3	-2	0	0	0	4	1	3

- Cherchons d’abord l’ (les) antécédent (s) de 2015
- On ajoute au plus 4 x 7 = 28 à 2015, un tel nombre est au plus 2043
- Nous cherchons 20XY avec X et Y tels que 10X + Y – 5 – 6 - B(X) – B(Y) = 15
- 9X + D(X) + D(Y) = 26
- **Si** X = 4, 2 ou 1, alors D(Y) = -10, 11 ou 18 impossible
- X = 3, D(Y) = 1, Y = 8
- 2015 a un antécédent et un seul, 2038

FFJM - 29e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - DF

Problème 13 – Le cadran numérique

Nombre de barrettes B	**6**	**2**	**5**	**5**	**4**	**5**	**6**	**3**	**7**	**6**
Différence D	-6	-1	-3	-2	0	0	0	4	1	3

- Cherchons ensuite l’ (les) antécédent (s) de 2038
- On ajoute au plus 4 x 7 = 28 à 2038, un tel nombre est au plus 2066
- Nous cherchons 20XY avec X et Y tels que $10X + Y – 5 – 6 - B(X) – B(Y) = 38$
- $9X + D(X) + D(Y) = 49$
- **Si** X = 6, 4 ou 3, alors D(Y) = -5, 13 ou 24 impossible
- X = 5, D(Y) = 4, Y = 7
- 2038 a un antécédent et un seul, 2057

- La réponse, unique, est **2057**

Problème 14 – La division de Mathias

- Cherchons A, B et C tous différents tels que 100000 = (ABC x CBA) + R avec A < C et R < CBA (*attention: il y a 2 solutions si R < ABC*)

- **Si** A ≥ 3, alors (3BC x CB3) dépasse (300 x 400) donc 100000

- **Si** A = 2
- C ≤ 4, sinon (2BC x CB2) dépasse (200 x 500) donc 100000
- 234 x 432 = 101088 trop grand, 214 x 412 = 88168 trop petit, C ≠ 4
- 273 x 372 = 101556 trop grand, 263 x 362 = 95206 trop petit, C ≠ 3
- D'où une impossibilité

- A = 1

Problème 14 – La division de Mathias

- 128 x 821 = 105088 trop grand, C ≤ 7
- 127 x 721 = 91567 trop petit, 137 x 731 = 100147 trop grand, C ≠ 7
- 146 x 641 = 93586 trop petit, 156 x 651 = 101556 trop grand, C ≠ 6
- 194 x 491 = 95254 trop petit, C = 5
- 185 x 581 = 101556 trop grand, 165 x 561 = 95206 trop petit
- 175 x 571 = 99925, R = 75, B = 7
- Il y a **2 réponses**, **175** et **571**

Problème 15 – La factorielle

- Le nombre n'a pas de chiffre au moins égal à 7, sinon il serait supérieur à 5040 (plus de 3 chiffres)
- Le nombre n'a pas de chiffre 6, sinon il serait supérieur à 720 et le chiffre des centaines serait supérieur à 6
- Le nombre a au moins un chiffre 5, sinon il serait au plus égal à 3 x 24 = 72 (moins de 3 chiffres)

Nombre	Factorielle
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040

Problème 15 – La factorielle

- $555 > 360 = 3 \times 5!$
- 55X ou 5X5 $> 264 \geq 240 + X!$ pour $X \leq 4$
- $X55 > ((2 \times 5!) + X!)$ pour $2 \leq X \leq 4$
- $155 < 241 = (2 \times 5!) + 1!$
- Le nombre a un seul chiffre 5

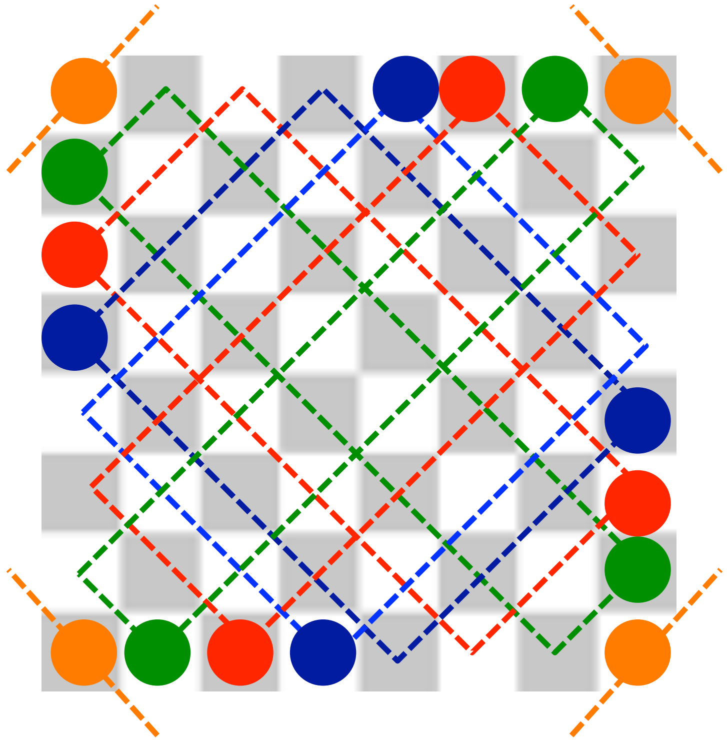
- Le nombre est au plus égal à $5! + (2 \times 4!) = 168$
- **Si** $15X = 5! + 1! + X! = 121 + X!$, alors $29 + X = X!$ impossible
- $1X5 = 121 + X!$, $4 + 10(X-2) = X!$, $X = 4$

- La réponse, unique, est **145**

Nombre	Factorielle
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040

Problème 16 – Des pions sur l'échiquier

- A cause des droites orange, nous devons placer un pion à chaque coin
- Ils satisfont également les bords
- A cause de leurs côtés, nous devons placer des pions à deux sommets opposés de chaque rectangle dessiné
- Pour deux rectangles images l'un de l'autre par rotation de 45°, nous pouvons satisfaire 2 lignes et 2 colonnes autres qu'un bord



- La réponse est **16** pions
- *Incidemment, nous avons montré que $2^3 = 8$ dispositions conviennent*

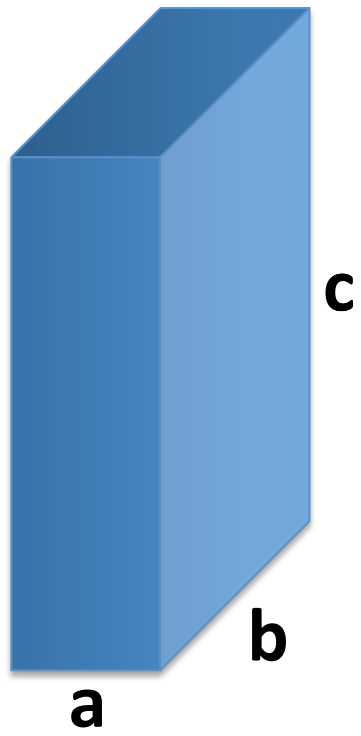
Problème 17 – Le parallélépipède

- Soient $a \le b \le c$ les nombres de petits cubes le long de chaque arête ($a \ge 1$)

- Le problème revient à résoudre $abc = 2(a-1)(b-1)(c-1)$ **(E)**

- **Si** $a \ge 5$
- $c/(c-1) \le b/(b-1) \le a/(a-1) \le 5/4$
- **(E)** donne $2 \le (5/4)^3 = 1{,}953125$
- D'où une contradiction

- **Si** $a = 2$, alors **(E)** devient $bc = (b-1)(c-1)$
- D'où une contradiction



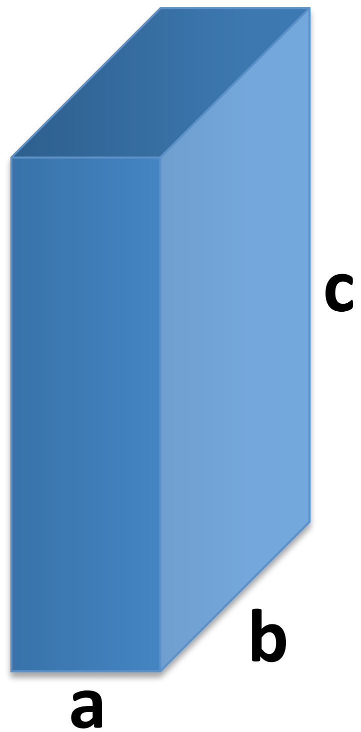
FFJM - 29e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - DF

Problème 17 – Le parallélépipède

- Si a = 4, alors **(E)** devient c = 3 + 6/(b-3)
- (b-3) divise 6 avec b ≤ c
- D'où les réponses 144 pour b = 4 et c = 9,
  120 pour b = 5 et c = 6

- Si a = 3, alors **(E)** devient c = 4 + 12/(b-4)
- (b-4) divise 12 avec b ≤ c
- D'où les réponses 240 pour b = 5 et c = 16,
  180 pour b = 6 et c = 10,
  168 pour b = 7 et c = 8

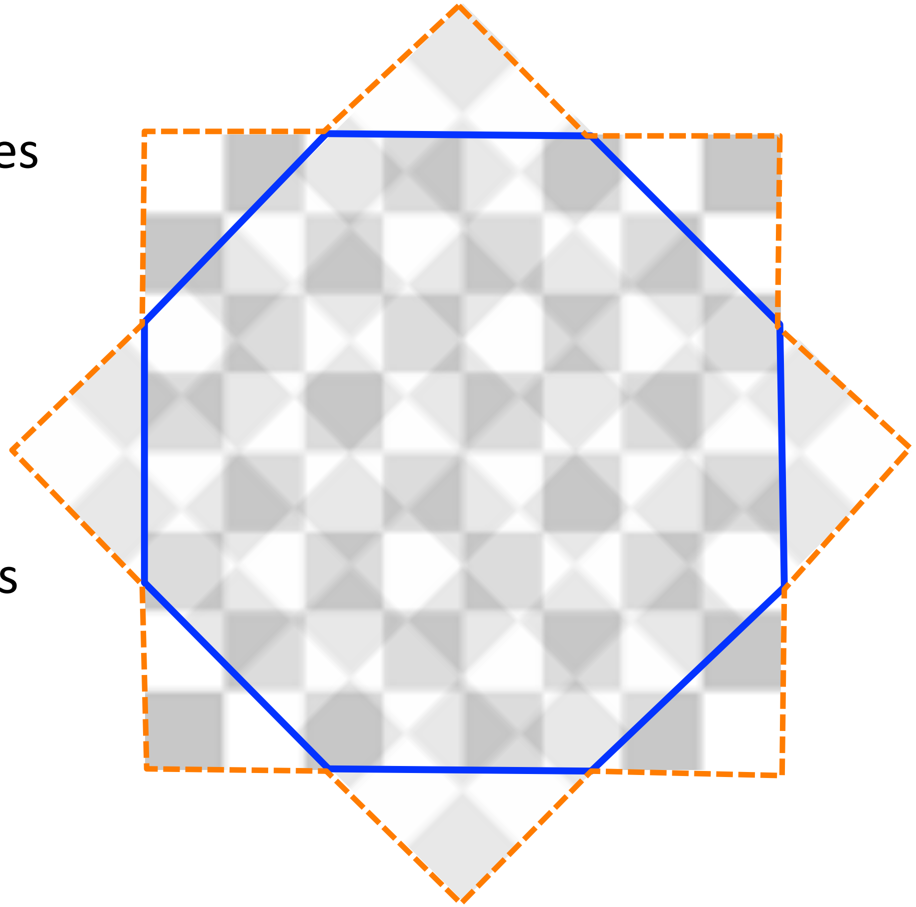
- Il y a **5 réponses**, **120**, **144**, **168**, **180** et **240**



Problème 18 – Les deux échiquiers

- Dans les 8 triangles rectangles isocèles, l'aire totale des cases noires est égale à celle des cases blanches (rotation de 45°)

- Dans l'intersection octogonale, il y a 4 cas en fonction de la couleur des 2 cases des 2 échiquiers
- Ils ont tous la même aire totale (rotation de 45°)
- 3 cas sur 4 sont noir en apparence



Problème 18 – Les deux échiquiers

- Soit c l'hypoténuse de chaque triangle ou le côté de l'octogone
- $2c/\sqrt{2} + c = 8x5 = 40$ cm
- $c = 40(\sqrt{2}-1)$ cm

- L'aire totale des 8 triangles est $2c^2 = 3200(3-2\sqrt{2})$ cm²
- L'aire totale de l'intersection est $40^2 - c^2 = 3200(\sqrt{2}-1)$ cm²
- L'aire totale des cases noires apparentes est $1600(3-2\sqrt{2}) + 2400(\sqrt{2}-1)$ $= 800(3-\sqrt{2}) \approx$ **1269 cm²**